Relativitetsteori

Henrik I. Andreasen

Foredrag afholdt i matematikklubben Eksponenten

Thisted Gymnasium 2015

Koordinattransformation i den klassiske fysik

- Hvis en fodgænger, der står stille i et lyskryds, observerer på sit ur, at der er rødt lys i 15 sekunder, vil en bilist, der kører forbi, på sit ur observere det samme.
- Hvis en person, der står stille i vejkanten, observerer med sin afstandsmåler, at der er 50 meter mellem kantpælene, vil en bilist, der kører forbi, med sin afstandsmåler observere det samme.
- Det er en konsekvens heraf, at to observatører, der måler en eller anden fysisk størrelse, vil måle det samme, selv om de befinder sig i to forskellige koordinatsystemer.
- Man kan dog vise, at der er problemer, hvis de to koordinatsystemer ikke bevæger sig med konstant hastighed i forhold til hinanden på grund af medføringskræfter.

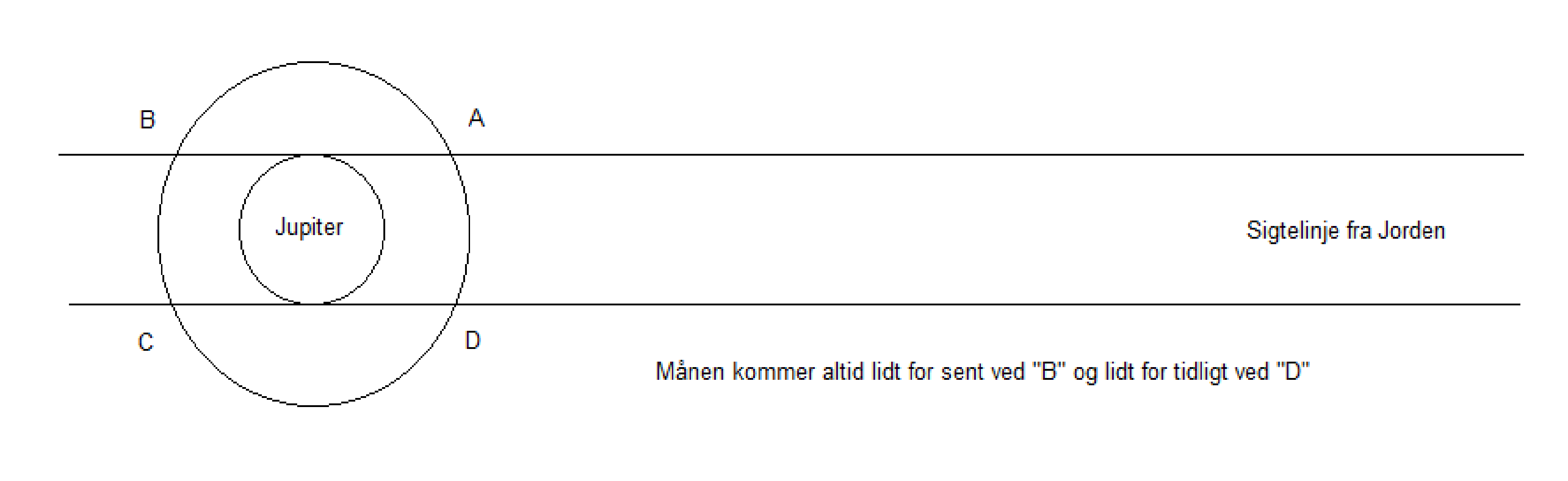
Inertialsystemer

- Man kan vise, at problemerne med accelererede koordinatsystemer skyldes, at Newtons første lov (inertiens lov) ikke gælder. Det er desuden sådan, at selv om den gælder nu, er det ikke sikkert i morgen..
- Ved et inertialsystem forstår man et sædvanligt (kartesisk) koordinatsystem med et ur, hvori Newtons første lov gælder hele tiden.
- Newtons første lov: En partikel, der ikke påvirkes af en ydre kraft, vil bevæge sig med konstant fart langs en ret linje for evigt.

Albert Einstein 1905: FORKERT!

- Selv om der stadig er tale om inertialsystemer, kan man ikke gå ud fra, at fysiske størrelser målt i et system, der bevæger sig i forhold til det, der måles på, giver samme resultat, som hvis man måler i et system, der er i hvile i forhold til det.
- Begrebet samtidighed er kun defineret, hvis de to processer, der er samtidige, observeres i et inertialsystem, der er i hvile i forhold til begge.
- Hvor i alverden fik han den vanvittige ide fra?

Ole Rømer 1661



Ole Rømer beregnede heraf, at lysets hastighed er cirka 300 000 km/s og ikke uendelig stor, som man ellers formodede på den tid.

James Maxwell 1889

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

Maxwell fandt, at lys er en form for elektromagnetisk stråling, der består af elektriske og magnetiske felter, der står vinkelret på hinanden og vinkelret på udbredelsesretningen.

Felterne skal opfylde Maxwells 4 ligninger, hvorved man kommer frem til formlen for udbredelseshastigheden i vakuum, der altså er konstant.

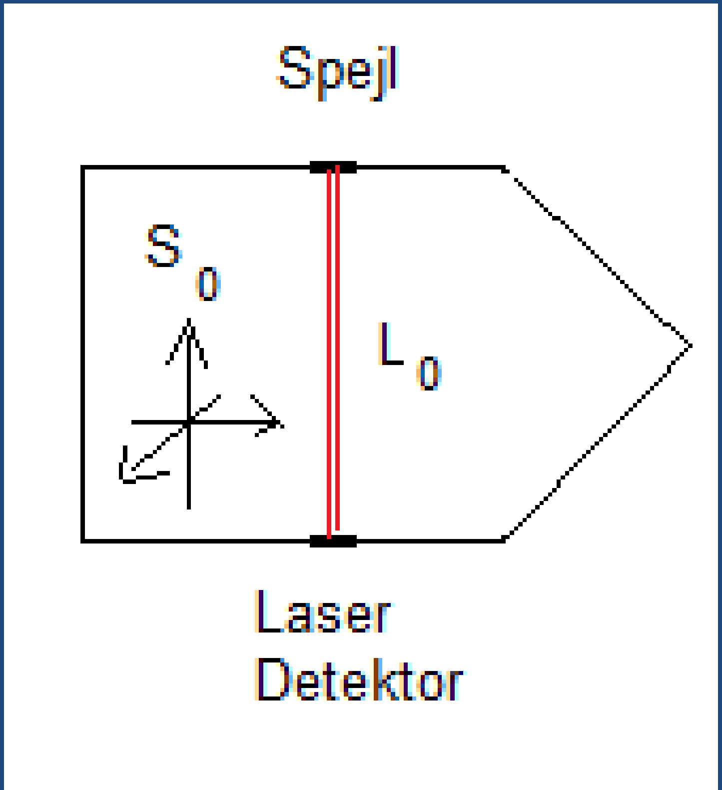
Maxwells teori kræver ikke, at bølgerne udbreder sig i noget, idet elektriske og magnetiske felter kan eksistere i vakuum.

Det store spørgsmål er så: Hvad måles hastigheden i forhold til?

Einsteins postulater 1905

- 1. Det er lige meget i hvilket inertialsystem, man måler lysets hastighed. Lyset udbreder sig altså lige hurtigt i forhold til observatøren uanset dennes hastighed.
- 2. Der findes ikke noget inertialsystem, der har andre egenskaber end andre. Fysikkens love gælder på samme måde i dem alle. Det er selvfølgelig klart, at størrelser, der afhænger af koordinaterne, kan være forskellige, men lovene er ens.

Feynman-uret



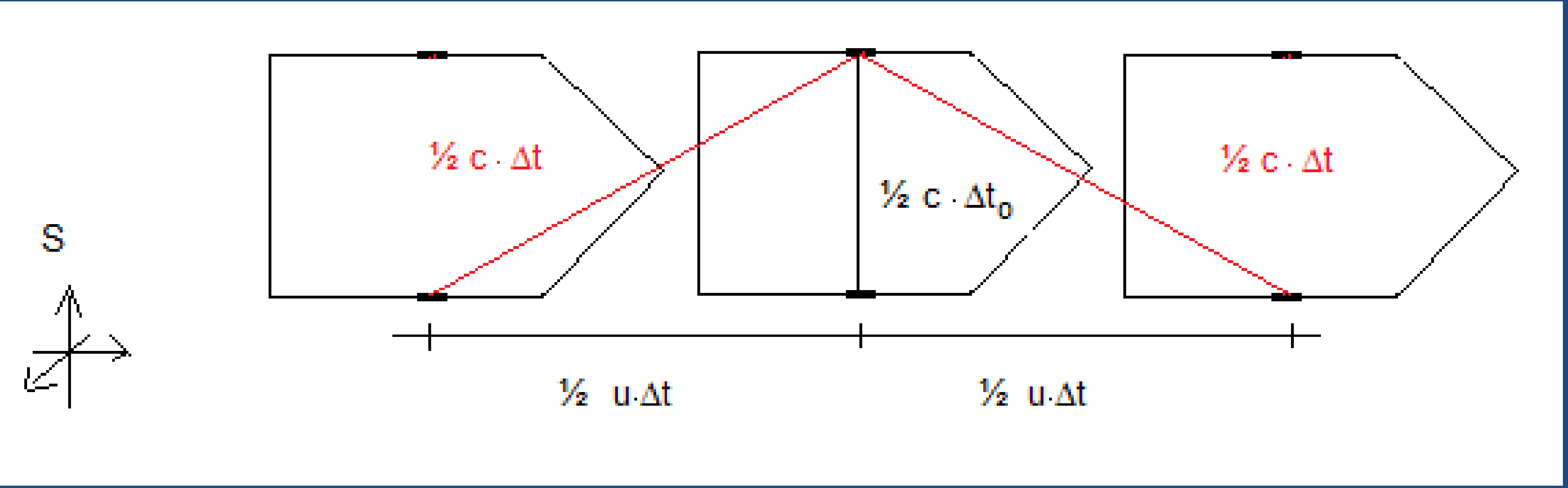
En raket farer gennem rummet med en konstant hastighed *u* i forhold til en ydre observatør.

En kort laserimpuls afsendes fra gulvet, rammer et spejl i loftet og returnerer til en detektor på samme sted, som den kom fra.

Laserimpulsens flyvetid er klart givet ved formlen:

$$L_0 = c \cdot \Delta t_0$$

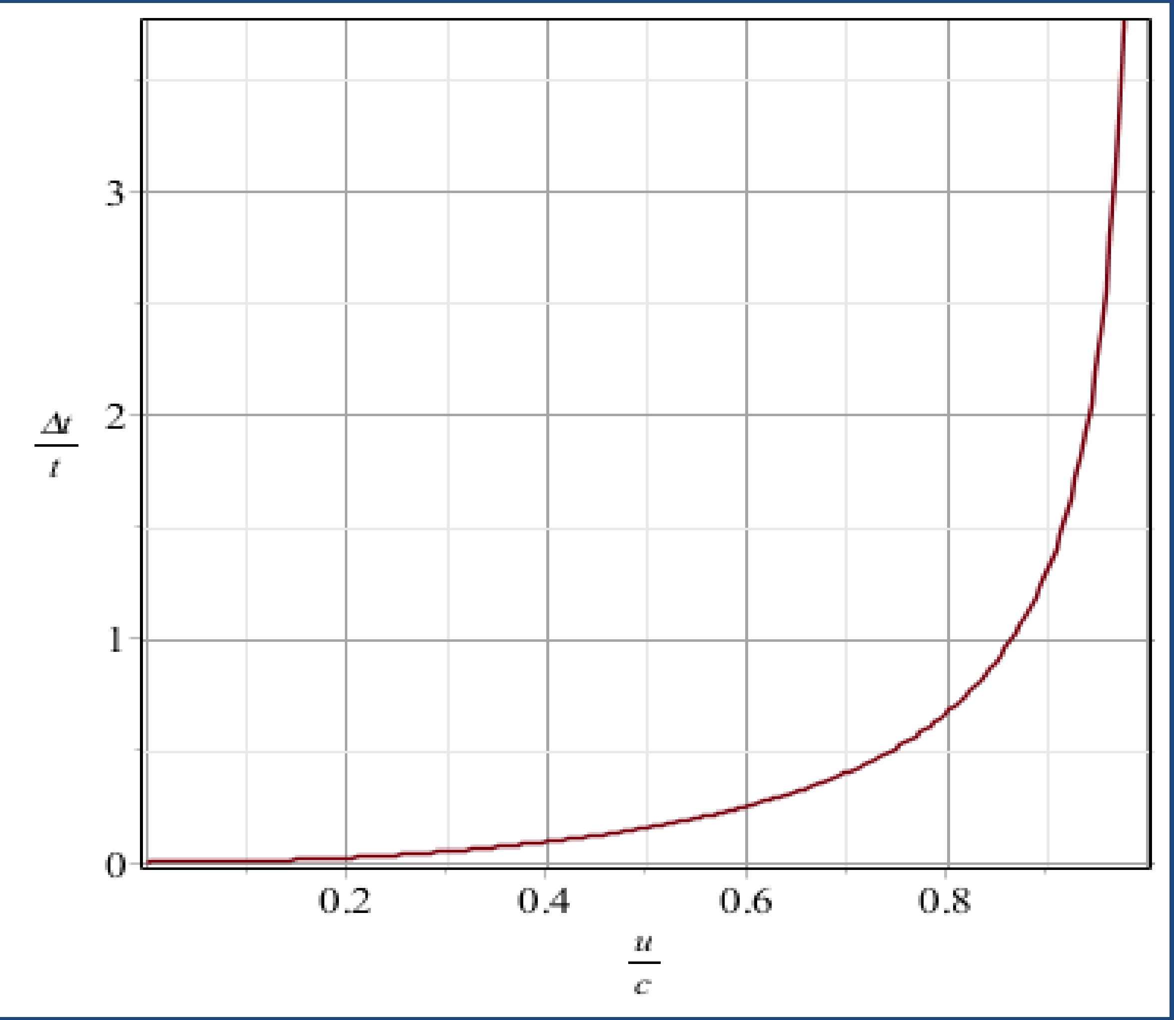
Tidsdilatationen



$$\left(\frac{1}{2}\cdot c\cdot \Delta t_0\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot u\cdot \Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot c\cdot \Delta t\right)^2 \Rightarrow c^2\cdot \Delta t_0{}^2 = \Delta t^2\cdot\left(c^2-u^2\right) \Rightarrow \Delta t_0{}^2 = \Delta t^2\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Tidsdilatationen



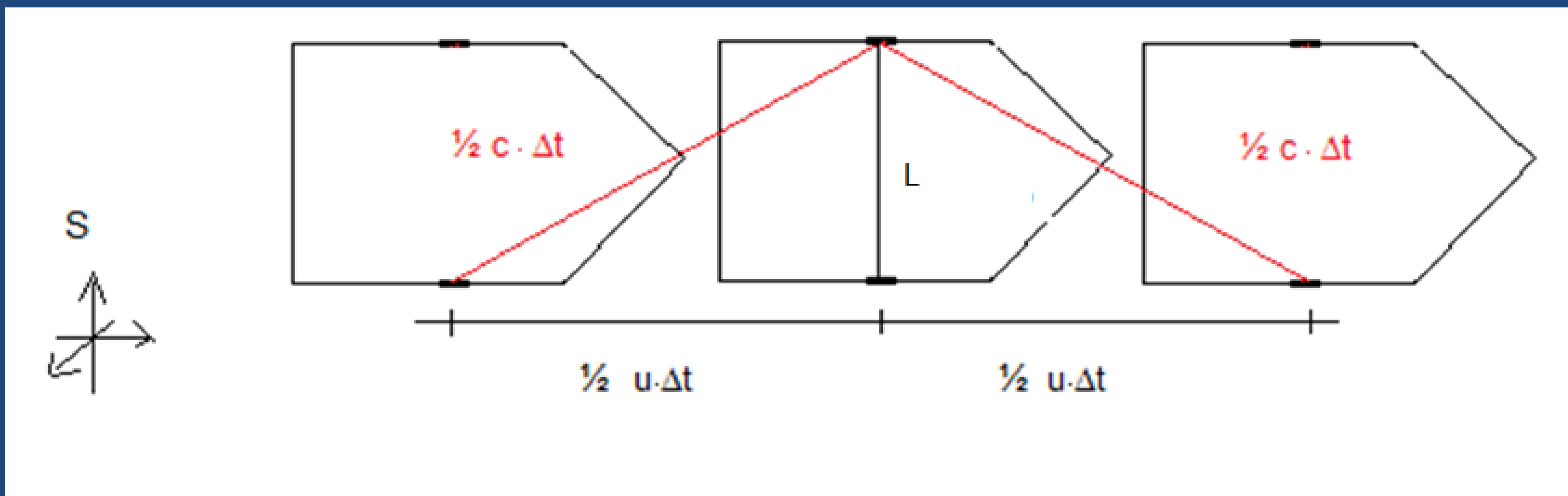
Tvillingeparadokset 1

- I det øjeblik, hvor de to koordinatsystemer ligger oven i hinanden nulstilles begge ure. I samme øjeblik fødes et barn i raketten og et barn på Jorden.
- På sin 50-årsdag tænker barnet på Jorden på sin fælle i raketten. Hvor gammel er vedkommende nu, hvis raketten bevæger sig med 10% af lysets hastighed?
- Svaret er at han er 3 måneder yngre (?)

Tvillingeparadokset 2

- På sin 50-årsdag tænker barnet i raketten på sin fælle nede på Jorden. Hvor gammel er vedkommende nu, hvis Jorden bevæger sig i den modsatte retning med 10% af lysets hastighed?
- Svaret er at han er 3 måneder yngre (hvorfor?)
- Paradokset viser, at begrebet samtidighed kun er defineret <u>i samme inertialsystem</u>.

Længder vinkelret på *u*



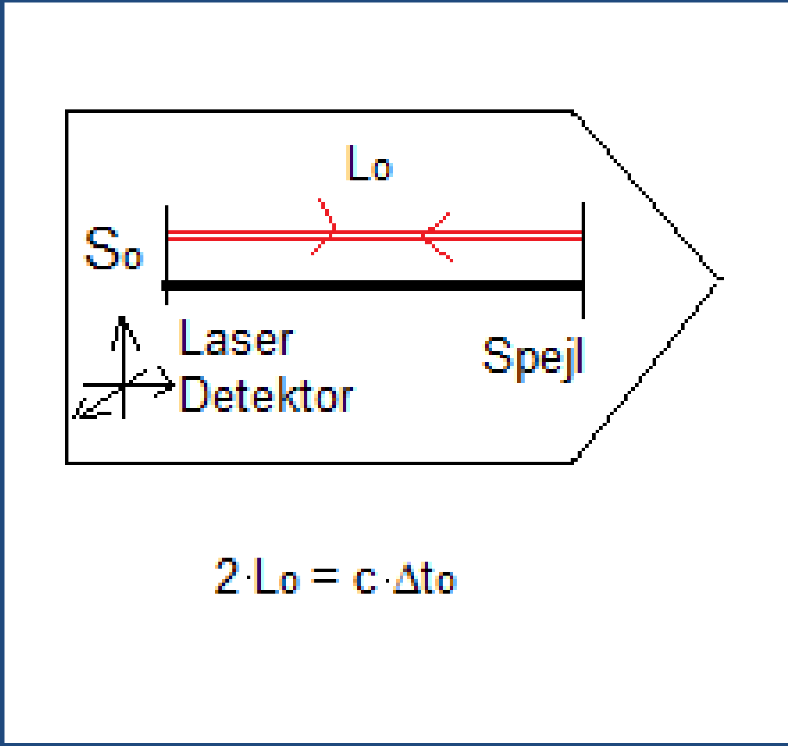
$$\text{Pythagoras 'sætning} : L^2 = (\tfrac{1}{2}\cdot c\cdot \Delta t)^2 - (\tfrac{1}{2}\cdot u\cdot \Delta t)^2 = \tfrac{1}{4}\cdot (c^2 - u^2)\cdot \Delta t^2 =$$

$$\frac{1}{4}\cdot (c^2 - u^2)\cdot \frac{\Delta t_0{}^2}{(1-\frac{u^2}{c^2})} = \frac{1}{4}\cdot c^2\cdot \Delta t_0{}^2 = L_0{}^2$$

Et logisk problem

- I beviset for tidsforlængelsen antog jeg, at den lodrette katete havde samme længde i de to systemer.
- Jeg bruger omvendt tidsforlængelsen for at vise, at dette netop er tilfældet.
- Vi har derfor kun vist, at de to ting hænger tæt sammen med hinanden, men ikke at de er sande. Fysik kan ikke bevises matematisk.

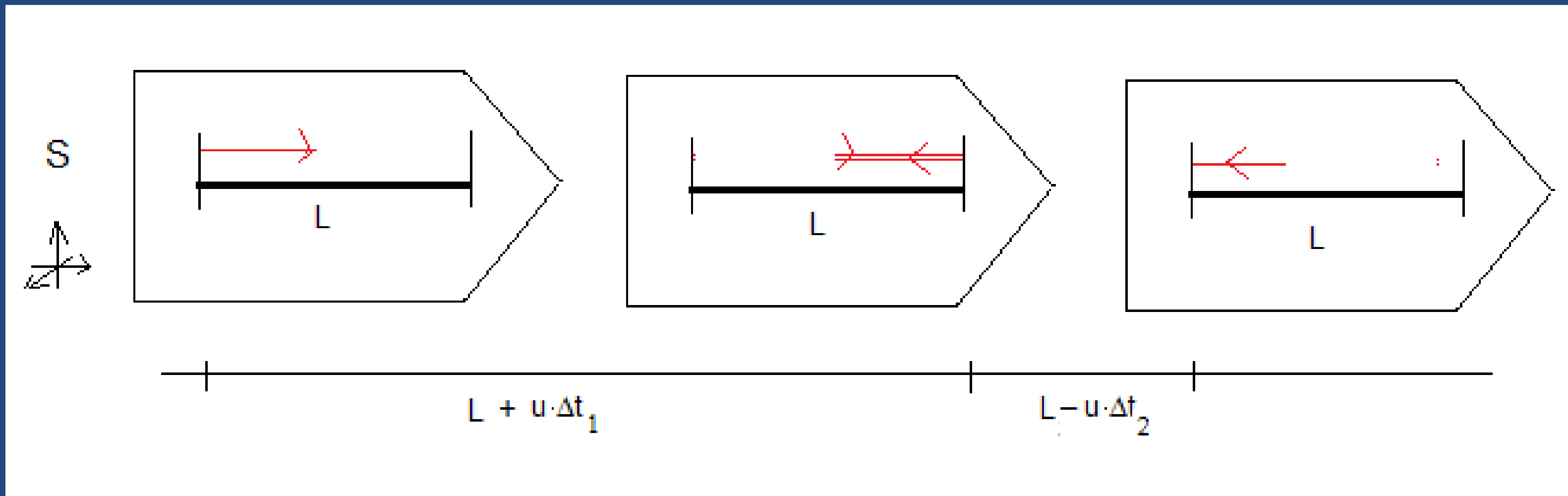
Feynman-linealen



Vi ønsker at måle længden af den sorte stang, der er parallel med rakettens hastighed.

Man bruger et Feynman-stopur, der måler den tid, der går, fra en kort laserimpuls afsendes fra stangens venstre ende, reflekteres fra spejlet i højre ende og til den modtages igen i samme punkt, som den blev afsendt fra.

Længdekontraktionen

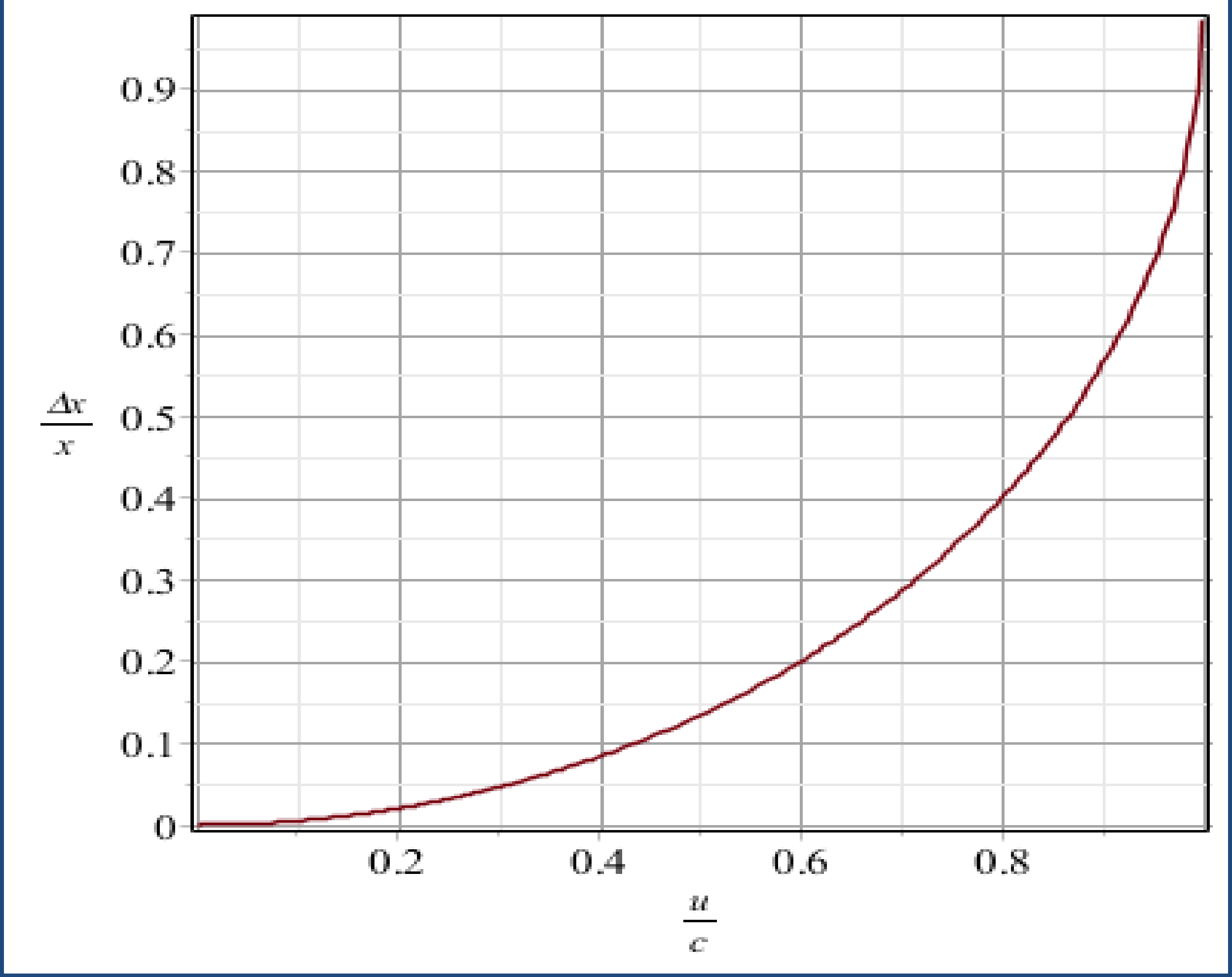


Da $L+u\cdot\Delta t_1 = c\cdot\Delta t_1$ og $L-u\cdot\Delta t_2 = c\cdot\Delta t_2$ må den samlede tid være $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 =$

$$\frac{L}{c-u}+\frac{L}{c+u}=\frac{2L}{c\cdot(1-\frac{u^2}{c^2})} \Rightarrow c\cdot\Delta t=\frac{2L}{(1-\frac{u^2}{c^2})} \Rightarrow c\cdot\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{2L}{(1-\frac{u^2}{c^2})} \Rightarrow$$

$$\frac{2\cdot L_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{2L}{(1-\frac{u^2}{c^2})} \Rightarrow L = L_0\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Længdekontraktionen



Hvad har vi vist?

- Vi har vist tidsforlængelsen og længdeforkortingen samt at længder vinkelret på bevægeseshastigheden ikke forkortes.
- Vi har dog kun vist, at de tre ting er konsistente, ikke at de er sande i matematisk forstand.
- Hvis en af dem er sand vil alle tre ting dog være det. Svært uden at man smugler flere antagelser ind ad bagdøren.
- Passer det med virkeligheden?

Myonens middellevetid

- Myoner dannes, når kosmisk stråling kolliderer med atomer i den øverste del af atmosfæren måske 100 km oppe. Myonens middellevetid τ_0 er 2,20 mikrosekunder hvorfor c τ_0 = 660m.
- Da myoner bevæger sig med 99,95% af lysets hastighed, burde man ikke kunne se nogen på jordoverfladen.
- Det kan man alligevel fordi Δt = 2,2 / (1-0,9995)^1/2 giver 69,6 mikrosekunder svarende til en vejlængde på cirka 20 km. I Jordens koordinatsystem kan en vis del af dem godt nå ned.

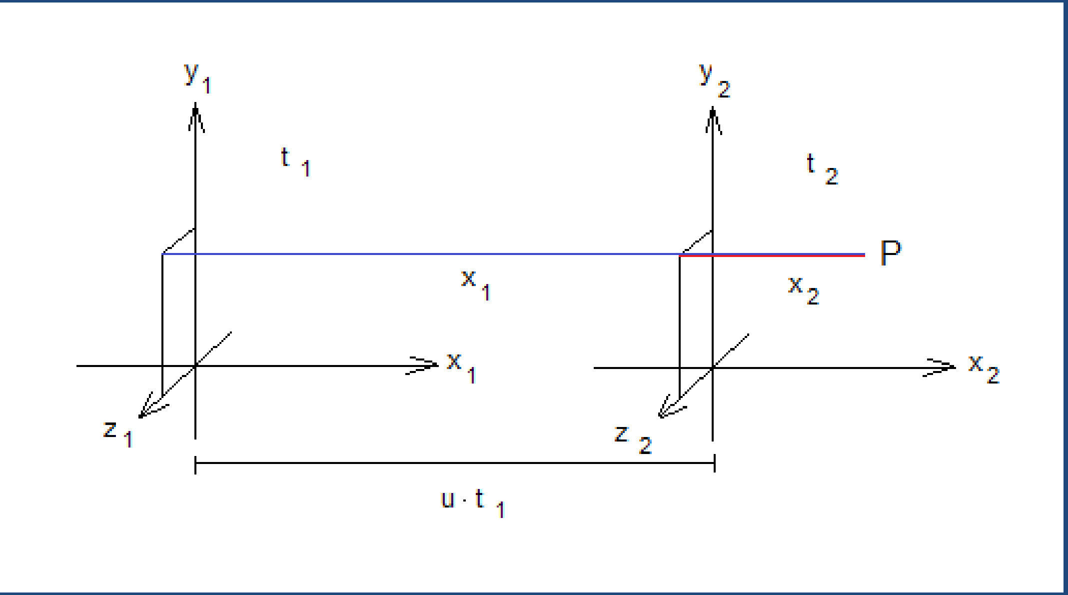
Myonens middelvejlængde

- Omvendt, set fra myonens koordinatsystem, skal man anvende længdekontraktionen for at beregne vejlængden.
- Det giver L = 100 * (1-0,9995)^1/2 = 3,16 km
- Det svarer til det stykke, som myoner bevæger sig på cirka 5 middellevetider, så nogle af dem kan forventes at overleve turen.
- (Tak til Lærke, 3x)

GPS-systemet

- Satellitterne i GPS-systemet bevæger sig med en hastighed på cirka 10 km/s i forhold til en person på Jorden så (1-u^2/c^2)^1/2 afviger kun cirka 8*10^-10 fra 1.
- Afstanden kan være cirka 1000 km så den relativistiske kontraktion er kun på 8 cm.
- Med GPS kan man imidlertid godt opnå en præcision på op til 15 cm lokalt over et mindre område. Det er derfor nødvendigt at korrigere.
- Det er i øvrigt også nødvendigt at korrigere for rummets krumning i den almene relativitetsteori, der har cirka samme størrelse.
- (Tak til David, 3x)

Lorentztransformationen



Akserne er parallelle og begyndelsespunkterne lå oven i hinanden, da tiden var nul i begge systemer.

System 2 bevæger sig med hastigheden u i x-retningen i forhold til system 1.

Observeret i S_1 gælder at $x_1 = u \cdot t_1 + x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Leftrightarrow x_2 = \frac{x_1 - u \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentztransformationen

På samme måde fås at $x_2 = -u \cdot t_2 + x_1 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ som kan sættes lig med det forrige resultat.

$$\frac{x_1 - u \cdot t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = -u \cdot t_2 + x_1 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad u \cdot t_2 = x_1 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{x_1 - u \cdot t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$u \cdot t_2 = \frac{x_1 \cdot \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - u \cdot t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{t_1 - \frac{u \cdot x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Hastighedstransformationen

- Lad os antage at punktet P bevæger sig et lille stykke Δx på et vist stykke tid Δt. Dette kan naturligvis observeres i begge systemer (1 + 2)
- Ved ”hastighed” forstås i fysik grænseværdien for brøken $\Delta x/\Delta t$ når man gør Δt ”uendelig kort” (ellers er det en gennemsnitshastighed)
- Man skal bruge de to størrelser fra samme koordinatsystem, for at beregne hastigheden.

(x,y,z,t) og (x+Δx,y,z,t+Δt) i S_1 og S_2

$$x_2+\Delta x_2=\frac{x_1+\Delta x_1-u\cdot(t_1+\Delta t_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ \text{fratrækkes}\ x_2=\frac{x_1-u\cdot t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\quad\Rightarrow\quad\Delta x_2=\frac{\Delta x_1-u\cdot\Delta t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2+\Delta t_2=\frac{t_1+\Delta t_1-\frac{u}{c^2}\cdot(x_1+\Delta x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ \text{fratrækkes}\ t_2=\frac{t_1-\frac{u}{c^2}\cdot x_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\quad\Rightarrow\quad\Delta t_2=\frac{\Delta t_1-\frac{u}{c^2}\cdot\Delta x_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Ved division og forlængning med $1/\Delta t_1$ fås (idet kvadratroden forkortes væk):

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\frac{\Delta x_1-u\cdot\Delta t_1}{\Delta t_1-\frac{u}{c^2}\cdot\Delta x_1}=\frac{\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}-\frac{u\cdot\Delta t_1}{\Delta t_1}}{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_1}-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}}\quad\Rightarrow\quad v_2=\frac{v_1-u}{1-\frac{uv_1}{c^2}}$$

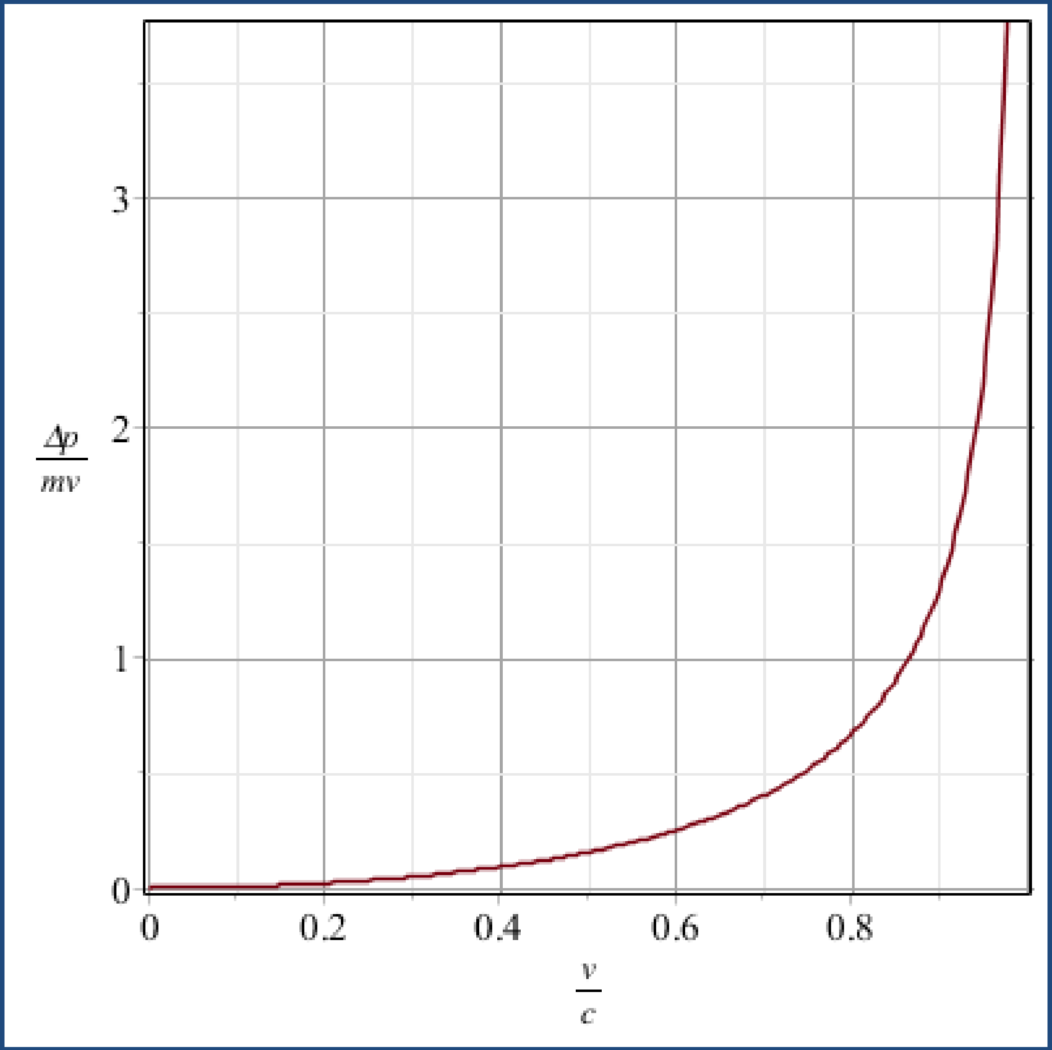
Specialtilfælde

- Hvis både v_1 og u er meget mindre end c, vil brøken i nævneren blive nul. I dette tilfælde er $v_2 = v_1 – u$ svarende til Galileitransformationen.
- Hvis v_1 er lig med c vil også $v_2 = c$ fordi brøken giver (c-u)/(1-uc/c^2) = c(c-u)/(c-u) = c
- Intet kan altså bevæge sig hurtigere end c, hvilket skyldes, at lysets hastighed er ens i alle inertialsystemer.

Relativistisk impuls

- Lad os sige, at vi har en partikel med hastighed (v,0,0) langs x-aksen i et inertialsystem
- Den klassiske impuls (bevægelsesmængde) er givet ved formlen $p = mv$
- For systemer af partikler, der kolliderer med hinanden, er den samlede impuls bevaret
- Det vil man gerne have, at den relativistiske impuls også er. I så fald bliver man nødt til at ændre definitionen ved at dividere med den sædvanlige kvadratrod (1-v^2/c^2)^1/2

Relativistisk impuls



Kraft, acceleration og Newtons 2. lov

Newtons 2. lov giver at kraften er differentialkvotienten af impulsen :

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}p = \frac{d}{dt}\frac{m\cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m\cdot v\cdot\frac{-\frac{2v}{c^2}\cdot\frac{dv}{dt}}{2\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,2}} =$$

$$\frac{m\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + m\cdot v^2\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}} = \frac{m\cdot\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}} = \frac{m\cdot a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}}$$

Kinetisk energi

- Lad os antage, at en partikel starter med hastigheden 0 i punktet (0,0,0) og accelereres op til hastigheden v i punktet (x,0,0)
- Den kinetiske energi starter med at være nul og forøges med det arbejde, den accelererende kraft udfører på partiklen. Vi er nødt til at anvende integralregning, hvor processen deles op i uendeligt mange, uendeligt små trin, der lægges sammen.

Relativistisk kinetisk energi

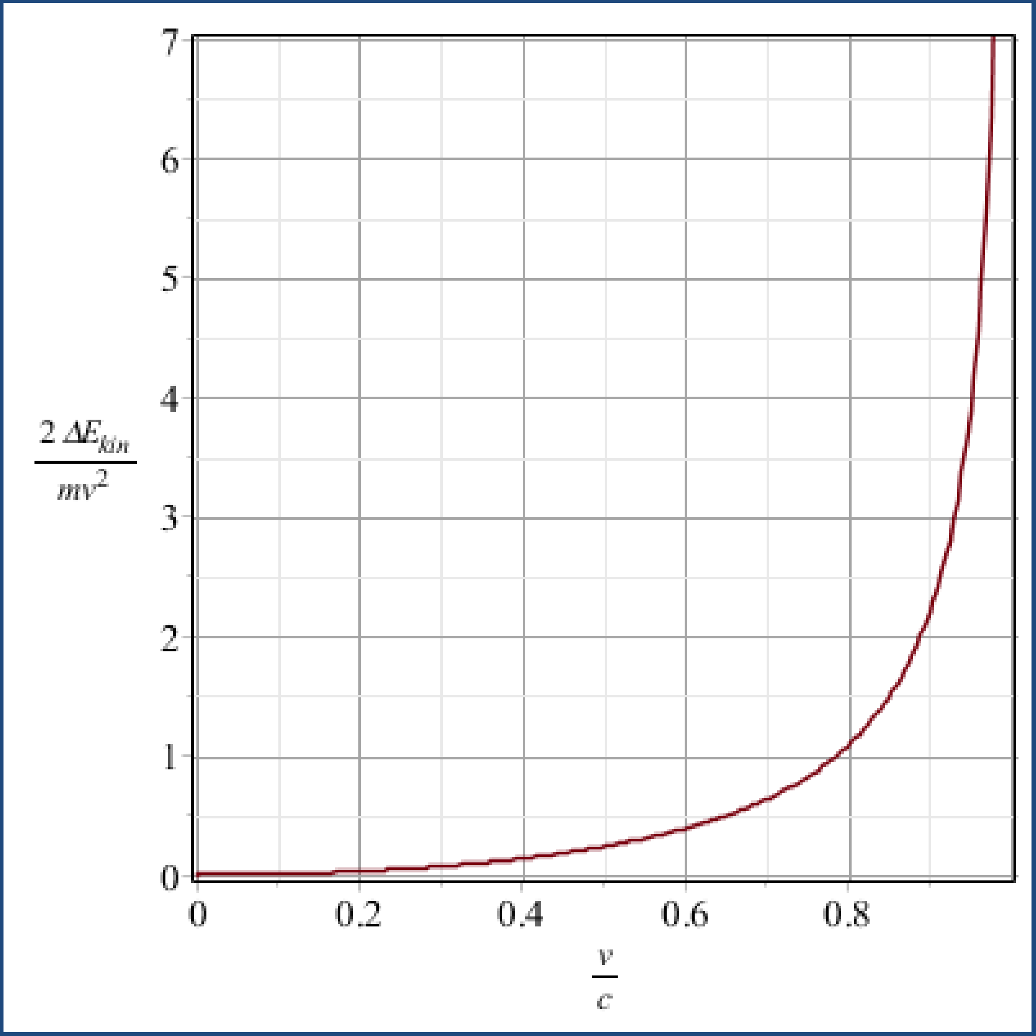
$$E_{kin}(v) = \int_0^x F(s)ds = \int_0^x \frac{m \cdot a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3} ds = \int_0^v \frac{m \cdot v \cdot dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = -\frac{m \cdot c^2}{2} \cdot \int_{v=0}^{v} \frac{dq}{q^{2/3}}$$

$$Første\ substitution: \quad a \cdot dx = \frac{dv}{dt} \cdot dx = \frac{dx}{dt} \cdot dv = v \cdot dv$$

$$Anden\ substitution: \quad q = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{dq}{dv} = \frac{-2v}{c^2} \Rightarrow dv = \frac{-c^2}{2v} \cdot dq$$

$$E_{kin}(v) = \left[-\frac{m \cdot c^2}{2} \cdot \frac{q^{-1/2}}{-1/2} \right]_{v=0}^{v} = \left[\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^v = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m \cdot c^2$$

Relativistisk kinetisk energi



Relativistisk totalenergi E

Måske ville det være smartere at definere en ny energi?

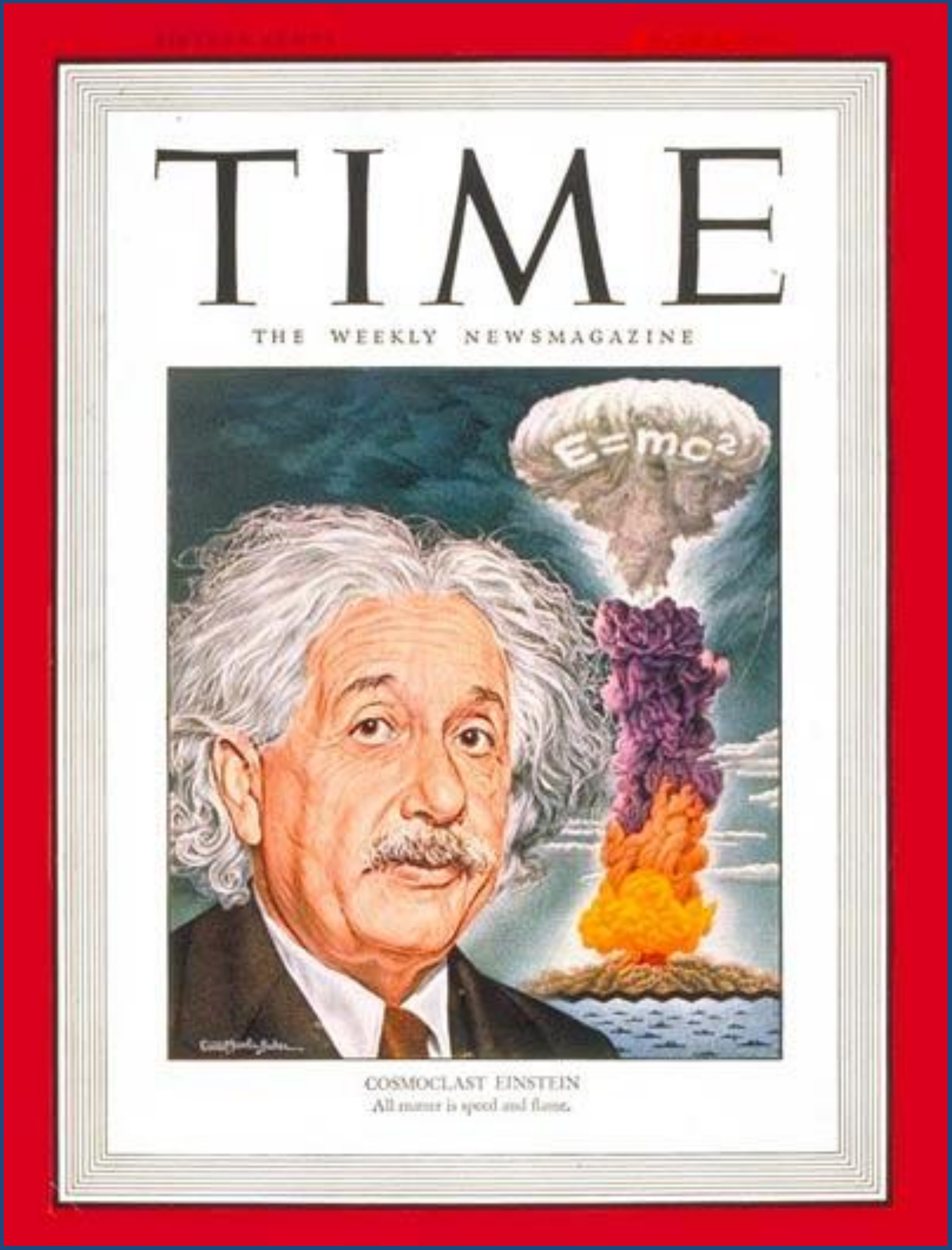
$$E = E_{kin}(v) + m \cdot c^2 = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Einsteins energiligning

$$E = \frac{m\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left(\frac{E}{m\cdot c^2}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \text{ og } p = \frac{m\cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left(\frac{p}{m\cdot c^2}\right)^2 = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{E}{m\cdot c^2}\right)^2 - \left(\frac{p}{m\cdot c^2}\right)^2 = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \Leftrightarrow E^2 - p^2\cdot c^2 = m^2\cdot c^4 \Leftrightarrow E^2 = p^2\cdot c^2 + m^2\cdot c^4$$

$$\textit{Partikel i hvile } (p=0)\text{:} \quad E^2 = 0^2\cdot c^2 + m^2\cdot c^4 \Rightarrow E = m\cdot c^2$$


TIME
THE WEEKLY NEWSMAGAZINE
E=mc2
COSMOCLAST EINSTEIN
All matter is speed and flame.